SESSION DE 1986

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 6 heures

(Classes terminale C et terminale E)

Les exercices I, II, III et le problème sont indépendants.

Le problème nécessite, en partie, l'emploi d'une calculatrice.

Une importance sensiblement égale sera accordée, d'une part à l'ensemble des trois exercices, d'autre part au problème.

EXERCICE I

On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D non coplanaires tels que AC = BD et AB = CD.

I, J, K, L sont respectivement les milieux des segments [AB], [AC], [CD], [BD].

Montrer que les points I, J, K, L sont dans un même plan P. Déterminer le point N de P tel que la somme de ses distances aux droites (AD) et (BC) soit minimale.

EXERCICE II

On considère dans le plan quatre points A, B, C, M.

1° Soit D un point du plan tel que DA $\leqslant$ CA et DB $\leqslant$ CB. Montrer qu'il existe un point N du plan tel que NA $\leqslant$ MA, NB $\leqslant$ MB et ND $\leqslant$ MC.

2° Soient A', B', C' trois points du plan tels que l'on ait :

$$A'B' \leqslant AB\ ,\quad A'C' \leqslant AC\ ,\quad B'C' \leqslant BC$$

Établir l'existence d'un point M' du plan vérifiant :

$$M'A' \leqslant MA\ ,\quad M'B' \leqslant MB\ ,\quad M'C' \leqslant MC$$

EXERCICE III

1° Soient u, v deux nombres complexes.

Établir l'inégalité : $\quad |u| + |v| \leqslant |u + v| + |u - v|$

2° Étant donné quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, montrer qu'ils vérifient

$$\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} |z_i + z_j|$$

PROBLÈME

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs.

Dans le problème on ne considère que des suites de nombres réels; une telle suite dont le terme général x_n est défini à partir d'un rang n_0 sera notée $x = (x_n)_{n \geqslant n_0}$. À toute suite $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ on associe les deux suites $\Delta_1 u = (\Delta_1 u_n)_{n \geqslant 1}$ et $\Delta_2 u = (\Delta_2 u_n)_{n \geqslant 1}$ définies par $\Delta_1 u_n = u_{n+1} - u_n$ et $\Delta_2 u_n = \Delta_1 u_{n+1} - \Delta_1 u_n$ (c'est-à-dire $\Delta_2 u_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$); enfin, pour tout rang n tel que $\Delta_2 u_n$ soit non nul, on pose :

$$u'_n = u_n - \frac{(\Delta_1 u_n)^2}{\Delta_2 u_n}$$

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

I A

1° Quelles sont les suites $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ telles que la suite associée $\Delta_2 u$ soit une suite constante ?

2° Déterminer les suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant la condition suivante : u'_n est défini pour tout $n \geqslant 1$ et la suite $u' = (u'_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite constante. On pourra considérer d'abord le cas où u' est la suite nulle.

B

On dira que la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ vérifie la propriété (P) si elle satisfait aux deux conditions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) la suite u admet une limite finie et, si l désigne cette limite, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n - l \neq 0$;

(P_2) la suite $\left(\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}\right)_{n \geqslant 1}$ admet une limite finie, notée λ, différente de 1.

1° Dans cette question on suppose que la suite u vérifie (P) et que $l = 0$.

a. Montrer que λ appartient à $[-1, 1[$.

b. Prouver qu'il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait : $\Delta_2 u_n \neq 0$.

c. Montrer que la suite $u' = (u'_n)_{n \geqslant n_0}$ tend vers zéro.

d. En supposant λ non nul étudier plus généralement la convergence de la suite $\left(\frac{u'_n}{u_{n+k}}\right)_{n \geqslant n_0}$, k étant un entier positif fixé. On étudiera d'abord le cas où $k = 0$.

Tournez la page S. V. P.

e. On suppose que λ est nul. Montrer que les suites $\left(\frac{u'_n}{u_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ et $\left(\frac{u'_n}{u_{n+1}}\right)_{n \geqslant n_0}$ tendent vers zéro. Donner un exemple de suite u telle que la suite $\left(\frac{u'_n}{u_{n+2}}\right)_{n \geqslant n_0}$ converge vers une limite non nulle.

2° Que deviennent les résultats de la question précédente pour une suite quelconque vérifiant la propriété (P) ?

II

Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle fermé [0, 1] par :

$$\varphi(x) = \sqrt[4]{(1-x)} = (1-x)^{1/4}$$

A

1° *a.* Étudier les variations de φ. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction φ, le plan étant rapporté à un repère orthonormal.

Montrer que l'équation $x = \varphi(x)$ a une solution et une seule. Soit l cette solution; vérifier que l appartient à l'intervalle [0,72; 0,73].

b. Étudier les variations de φ'. Étant donné deux points M_1, M_2 de $\mathcal{C}$, d'abscisses distinctes x_1, x_2, quelle est la position de l'arc M_1M_2 de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite M_1M_2 ? On pourra étudier le signe de $\varphi'(x) - m$ sur $]x_1, x_2[$, m étant la pente de la droite M_1M_2.

2° Pour $x \in [0, 1]$ on définit la fonction Φ par $\Phi(x) = \varphi[\varphi(x)]$.

a. Étudier les variations de Φ. Dans le plan, toujours rapporté à un repère orthonormal, tracer la courbe représentative (Γ) de Φ et préciser, en la justifiant, sa position par rapport à la droite $y - x = 0$.

Quelles sont les tangentes à Γ aux bornes de [0, 1] ?

b. Soit $a \in]0, 1[$. On considère la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_1 = a$ et par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que cette suite converge vers l. On pourra étudier les suites $(u_{2n-1})_{n \geqslant 1}$ et $(u_{2n})_{n \geqslant 1}$ et utiliser Φ. Une illustration graphique sera appréciée; un raisonnement rigoureux est nécessaire.

B

On rappelle que l désigne l'unique racine de l'équation $x = \varphi(x)$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

On considère sur $\mathcal{C}$ les points M et M' d'abscisses respectives x et $\varphi(x)$. On suppose x différent de l.

1° Montrer que la droite MM' coupe la droite d'équation $y - x = 0$ en un point Q unique. Calculer l'abscisse $\Lambda(x)$ de Q et montrer que l'on peut écrire :

$$\Lambda(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{[\Phi(x) + x - 2\varphi(x)]}$$

[On rappelle que $\Phi(x) = \varphi(\varphi(x))$.]

2° Montrer que la condition $0 < x < l$ entraîne $0 < x < \Lambda(x) < l$.

3° Ayant choisi $a \in]0, l[$, montrer que l'on peut définir une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ par $x_1 = a$ et, pour $n \geqslant 1$, par $x_{n+1} = \Lambda(x_n)$. Étudier la convergence de cette suite.

4° Montrer que la suite $\left(\frac{x_{n+1} - l}{x_n - l}\right)_{n \geqslant 1}$ est définie et converge vers une limite que l'on précisera.

C

1° *Indiquer le nombre maximum p de décimales que peut afficher votre calculatrice.* Pour toute expression E calculée à l'aide de celle-ci on désigne par $\overline{E}$ la valeur affichée avec p décimales. Exécuter, dans l'ordre, les instructions suivantes :

1. Donner à a la valeur 0,72;
2. Calculer $\overline{\varphi(a)}$;
3. Calculer $\overline{\Phi(a)}$:
4. Calculer $\overline{\varphi(a)} - a$;
5. Si $|\overline{\varphi(a)} - a|$ est inférieur ou égal à 5.10^{-p}, arrêter les calculs ;
6. Calculer $\overline{\Lambda(a)}$ et reprendre à l'instruction 2, en donnant à a la valeur $\overline{\Lambda(a)}$.

2° Soit $\overline{l}$ la dernière valeur de $\overline{\Lambda(a)}$ obtenue.

On suppose que pour $x \in [0{,}72 ; 0{,}73]$ on a $|\overline{\varphi(x)} - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Calculer $\overline{\varphi(\overline{l})} - \overline{l}$. Dire, avec quelle précision, fonction de ε, $\overline{l}$ représente l.

3° Soit la suite récurrente définie par $u_1 = 0{,}72$ et par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour $n \geqslant 1$.

Déterminer une valeur de l'entier m, la plus petite possible, telle que pour $n \geqslant m$ on ait $|l - u_n| < 10^{-6}$.